最小数枝付加によるk-枝連結グラフの(k+1)-枝連結グラフへの拡大構成(グラフ理論とその応用)

梶谷, 洋司; 上野, 修一; 中田, 広

数理解析研究所講究録
534巻 1984年 206-220

最小数枝付加による k − 枝連結グラフの (k + 1) − 枝連結グラフへの拡大構成

梶谷 洋司　上野 修一　中田 広
Yoji Kajitani　Shuichi Ueno　Hiroshi Nakada
東京工業大学　工学部

1、まえがき

与えられたグラフに最小本数の枝を付加して所望の枝連結度をもったグラフを構成する問題は、グラフの拡大構成問題のひとつとして知られている。[1]

本稿では、任意の k − 枝連結グラフが与えられたときに、最小本数の枝を付加して (k + 1) − 枝連結グラフを構成する方法を述べる。

2、準備

$G=(V,E)$ を連結な無向グラフとする。V は点集合、E は枝集合である。端点が u と v である枝を (u, v) と表すこともある。G から $E_s \subseteq E$ を開放除去したグラフを $G-E_s$ で表す。G において，$V_s \subseteq V$ の全ての点を同一視して1点 v_s で代表させ、両端点が V_s に含まれている枝を除去することを、

V_sを点v_sに縮約するという。Gの点vの次数を$d_G(v)$で表す。正整数kに対して、

$$\delta^k(G)=\sum_{v\in V}\max[0,\ k-d_G(v)]$$

と定義し、これをGのk次の不足度と呼ぶ。Gをk－枝連結グラフにするために付加すべき枝の最小本数を$\Delta^k(G)$で表すことにする。

k－枝連結グラフG＝（V，E）は、任意の$e\in E$に対して$G-\{e\}$がk－枝連結グラフではないとき、極小k－枝連結グラフであるという。極小k－枝連結グラフには次数kの点が少くともk＋1個存在することが知られている。[2] 任意の2点間に丁度k本の枝非共有道が存在するグラフを一様k－枝連結グラフという。一様k－枝連結グラフは極小k－枝連結グラフである。

3、主結果

G＝（V，E）の2点u，vの間にk本の枝非共有道が存在するときuR_kvと書くことにすると、関係R_kはV上の同値関係である。R_kの同値類をそれぞれ1点に縮約したグラフをG（R_k）で表す。

［定理1］　$\Delta^k(G)=\Delta^k(G(R_k))$

（証明）　まずGとG（R_k）において、長さk－1以下のカ

ットセットは1対1に対応していることに注意されたい。Gに$\Delta^k(G)$本の枝を付加してできたk-枝連結グラフをG'とする。G'においてGのR_kの同値類をそれぞれ1点に縮約したグラフをG''とすると、G''はk-枝連結である。従って、

$$\Delta^k(G) \geq \Delta^k(G(R_k))$$

である。

逆に、$G(R_k)$に$\Delta^k(G(R_k))$本の枝を付加してできたk-枝連結グラフを$G'(R_k)$とする。$G(R_k)$に付加した枝を(u, v)としたとき、u, vに対応するGのR_kの同値類の任意の点をそれぞれu', v'とすると、Gに全ての枝(u', v')を付加したグラフはk-枝連結である。従って、

$$\Delta^k(G) \leq \Delta^k(G(R_k))$$

を得る。　(証明終)

k-枝連結グラフの任意の点の次数はk以上であることと、定理1より、次の定理を得る。

[定理2]　$\Delta^k(G) \geq \lceil \delta^k(G(R_k))/2 \rceil$

一般に、定理2において等号は成立しないが、Gが(k-1)-枝連結グラフの場合には、等号が成立することが示せる。

[定理3]　Gが(k-1)-枝連結グラフならば、

$$\Delta^k(G) = \lceil \delta^k(G(R_k))/2 \rceil$$

である。

4、定理3の証明

Gが（k－1）－枝連結グラフであるとき、G（R_k）は一様（k－1）－枝連結グラフである。定理1から、定理3を証明するためには次の補題を証明すればよいことがわかる。

［補題1］ Gが一様（k－1）－枝連結グラフならば、

$$\Delta^k(G)=\lceil \delta^k(G)/2 \rceil$$

である。しかも$\delta^k(G)$が奇数のときには、$d_G(v)=k-1$なる任意の1点vに対して、Gに$\Delta^k(G)$本の枝を付加してvの次数がk＋1であるようなk-枝連結グラフを構成できる。

（証明） Gの点数に関する帰納法によって証明する。まずGの長さk－1の任意のカットセットが接続枝集合の場合に補題1が成立することを示す。

［補題2］一様（k－1）－枝連結グラフGにおいて、長さk－1の任意のカットセットが接続枝集合ならば、

$$\Delta^k(G)=\lceil \delta^k(G)/2 \rceil$$

である。しかも$\delta^k(G)$が奇数のときには、$d_G(v)=k-1$なる任意の1点vに対して、Gに$\Delta^k(G)$本の枝を付加してvの次数がk＋1であるようなk－枝連結グラフを構成で

きる。

（証明）　$\delta^k(G)$ が偶数の場合，$d_G(v)=k-1$ なる任意の点間に1本ずつ，総計 $\lceil \delta^k(G)/2 \rceil$ 本の枝を付加する。こうしてできたグラフは、仮定から、全てのカットセットがk本以上の枝からなるのでk－枝連結である。$\delta^k(G)$ が奇数の場合は、$V_{k-1}=\{v \mid d_G(v)=k-1\}$ としたとき、任意の異なる2点 $u, v \in V_{k-1}$ について、$V_{k-1}-\{v\}$ の任意の点間に1本ずつ、総計 $\lceil \delta^k(G)/2 \rceil -1$ 本の枝を付加し、残りの1本を u，v 間に付加する。この場合も明らかにk－枝連結である．（補題２の証明終）

さて、補題1の証明にもどる。Gの長さ $k-1$ の任意のカットセットが接続枝集合である場合は補題２によって補題1は成立するから、Gには接続枝集合以外の長さ $k-1$ のカットセットが存在すると仮定する。このようなカットセットの任意の1つをCとする。$G-C$ は2つの連結成分 $G_1'=(V_1', E_1')$，$G_2'=(V_2', E_2')$ に分かれるが、Gにおいて、G_2' を1点 v に縮約したグラフを $G_1=(V_1, E_1)$，逆に G_1' を1点 u に縮約したグラフを G_2 とすれば，

$$E_1 \cap E_2 = C, \qquad E_1 \cup E_2 = E$$

である。

まず G_1，G_2 が共に一様（$k-1$）－枝連結であることを示す。

G_1, G_2が共に$(k-1)$-枝連結であることは明らかである。いまG_1の中で、異なる2点v_a, $v_b \in V_1$間にk本以上の枝非共有道があると仮定する。Gにおいてはv_aとv_bを分離する長さ$k-1$の任意のカットセットDは、V_i'を非空な集合V_{ia}'とV_{ib}'に分割する$(i=1, 2)$。なぜならV_2'を分離しないカットセットはG_1においてもカットセットであり、仮定に反する。このようにしてVは4分割される。ここでV_{1a}'とV_{1b}'を結ぶ枝の本数をa本とする。同様に、V_{2a}', V_{2b}'間はb本、V_{1a}', V_{2a}'間はc本、V_{1b}', V_{2b}'間はd本、V_{1a}', V_{2b}'間はe本、V_{1b}', V_{2a}'間はf本の枝があるとする。すると次の諸式が成立する。

$$
\left[\begin{array}{lll}
a+e+c & \geq k & \cdots ① \\
a+d+f & \geq k & \cdots ② \\
a+e+f+b & = k-1 & \cdots ③ \\
c+d+e+f & = k-1 & \cdots ④
\end{array}\right.
\qquad
\left[\begin{array}{ll}
b+c+f \geq k-1 & \\
 & \cdots ⑤ \\
b+d+e \geq k-1 & \\
 & \cdots ⑥
\end{array}\right.
$$

ここで$1/2$(①+②−2×④+⑤+⑥)を計算すると、$a+b \geq k$となって③式に矛盾する。よってG_1は一様$(k-1)$-枝連結である。G_2についても同様である。

従ってCの選び方と帰納法の仮定より、$G_i\ (i=1, 2)$は$\lceil \delta^k(G_i)/2 \rceil$本の枝を付加して$k$-枝連結グラフにできる。ここで、

$$\delta^k(G) = \delta^k(G_1) + \delta^k(G_2) - 2 \qquad (1)$$

が成り立っていることに注意されたい。

2つの場合に分けて考察する。

<u>場合1：$\delta^k(G)$ が偶数のとき</u>

(1)式から、$\delta^k(G_1)$ と $\delta^k(G_2)$ は共に偶数であるか、または共に奇数である。さらに2つの場合に分ける。

<u>場合1.1：$\delta^k(G_1)$, $\delta^k(G_2)$ が共に偶数のとき</u>

G_i $(i=1,2)$ に $\lceil \delta^k(G_i)/2 \rceil$ 本の枝を付加してできた k-枝連結グラフを $G_i^k = (V_i, F_i)$ とする。G_1^k で v に接続している枝の集合を

$$A_1 = C \cup \{e_1\}$$

とし、A_1 の v ではない端点集合を X_1 とする。e_1 は付加された枝で, $e_1 = (v_0^1, v)$ $(v_0^1 \in X_1)$ とする。G_2^k で u に接続している枝の集合を

$$A_2 = C \cup \{e_2\}$$

とし、A_2 の u ではない端点集合を X_2 とする。e_2 は付加された枝で、$e_2 = (u, v_0^2)$ $(v_0^2 \in X_2)$ とする。

$$F = (F_1 - A_1) \cup (F_2 - A_2) \cup C \cup \{(v_0^1, v_0^2)\}$$

$$G^k = (V, F)$$

と定義する。(1)と G^k の定義から

$$|F - E| = \lceil \delta^k(G)/2 \rceil$$

である。

次にG^kがk-枝連結であることを示す。C^kをG^kの任意のカットセットとする。C^kがX_1またはX_2を分離しないならば、C^kはG_1またはG_2のカットセットであるから$|C^k| \geq k$である。そこでC^kがX_i（$i=1$, 2）をZ_1^iとZ_2^iに分離すると仮定する。一般性を失うことなく、$v_1^1 \in Z_1^1$, $v_2^1 \in Z_2^1$, $v_1^2 \in Z_1^2$, $v_2^2 \in Z_2^2$で、C^kはv_1^1, v_1^2とv_2^1, v_2^2を分離すると仮定する。G_1^k［G_2^k］においてv_1^1［v_1^2］とv_2^1［v_2^2］を結ぶk本の枝非共有道が存在するが、このうちv［u］を通る道は高々$\lfloor k/2 \rfloor$本である。従って、

$$|C^k| \geq 2(k - \lfloor k/2 \rfloor) \geq k$$

である。従ってG^kはk-枝連結である。

<u>場合1.2：$\delta^k(G_1)$, $\delta^k(G_2)$が共に奇数のとき</u>

帰納法の仮定から、G_1［G_2］に$\lceil \delta^k(G_1)/2 \rceil$［$\lceil \delta^k(G_2)/2 \rceil$］本の枝を付加してできるk-枝連結グラフで、$v$［$u$］の次数が$k+1$であるものが存在する。これを$G_1^k=(V_1, F_1)$［$G_2^k=(V_2, F_2)$］とする。$G_1^k$で$v$に接続している枝の集合を

$$A_1 = C \cup \{e_{11}, e_{12}\}$$

とし、A_1のvではない端点集合をX_1とする。e_{11}, e_{12}は付加された枝で、$e_{1i}=(v_{0i}^1, v)$（$v_{0i}^1 \in X_1$, $i=1$, 2）とする。

G_2^k で u に接続している枝の集合を

$$A_2 = C \cup \{e_{21}, e_{22}\}$$

とし、A_2 の u ではない端点集合を X_2 とする。e_{21}, e_{22} は付加された枝で、$e_{2i} = (u, v_{0i}^2)$ ($v_{0i}^2 \in X_2$, $i = 1, 2$) とする。

G_i^k ($i = 1, 2$) において、$x_i \in X_i$ と $y_i \in X_i$ を結ぶ k 本の枝非共有道が存在するが、このうち A_i の枝を含まない道は少くとも、

$$k - \lfloor (k+1)/2 \rfloor = \lceil (k-1)/2 \rceil$$

本存在することに注意されたい。2つの場合に分けて考察する。

<u>場合1、2、1：k が偶数のとき</u>

$$F = (F_1 - A_1) \cup (F_2 - A_2) \cup C \cup \{(v_{01}^1, v_{01}^2), (v_{02}^1, v_{02}^2)\}$$

$$G^k = (V, F)$$

と定義する。(1) と G^k の定義から、

$$|F - E| = \lceil \delta^k(G)/2 \rceil$$

である。

C^k を G^k の任意のカットセットとする。C^k が X_1 または X_2 を分離しないならば、C^k は G_1^k または G_2^k のカットセットであるから $|C^k| \geq k$ である。そこで C^k が X_i ($i = 1, 2$) を Z_1^i と Z_2^i に分離すると仮定する。一般性を失うことなく、$v_1^i \in$

Z_1^1, $v_2^1 \in Z_2^1$, $v_1^2 \in Z_1^2$, $v_2^2 \in Z_2^2$ で、C^k は v_1^1, v_1^2 と v_2^1, v_2^2 を分離すると仮定する。k は偶数であるから

$$\lceil (k-1)/2 \rceil = k/2$$

である。従って $\{v_1^1, v_1^2\}$ の点と $\{v_2^1, v_2^2\}$ の点を結ぶ枝非共有道が少くとも k 本存在するから、$|C^k| \geq k$ である。ゆえに G^k は k－枝連結である。

<u>場合1、2、2：kが奇数のとき</u>

kが偶数のときと同様に F, G^k, C^k, v_1^1, v_2^1, v_1^2, v_2^2 を定義する。いま G_1^k で v_1^1 と v_2^1 を結ぶ枝非共有道のうち、A_1 の枝を含まないものが、丁度

$$\lceil (k-1)/2 \rceil = (k-1)/2$$

本しかなかったとする。このとき $v_{01}^1 \in Z_j^1$ かつ $v_{02}^1 \in Z_j^1$ $(j=1, 2)$ とはならない。なぜなら v_1^1 と v_2^1 を結ぶ枝非共有道のうち A_1 の枝を含むものは $(k+1)/2$ 本あるが、枝を付加する以前の G_1 は $(k-1)$－枝連結グラフであったから、もともと A_1 の枝を含む道は $(k-1)/2$ 本あったはずである。しかるに $v_{01}^1 \in Z_j^1$ かつ $v_{02}^1 \in Z_j^1$ $(j=1, 2)$ であるならば、G_1 においては A_1 の枝を含む道は

$$(k+1)/2 - 2 = (k-3)/2$$

本しかなく、仮定に反する。G_2^k についても同様のことが言える。

従って一般性を失うことなく$v_{01}^1 \in Z_1^1$, $v_{02}^1 \in Z_2^1$と仮定する。このときさらに$v_{01}^2 \in Z_1^2$, $v_{02}^2 \in Z_2^2$と仮定すると、C^kは$k-1$本の枝からなるカットセットである。そこでFの定義で、

$$e_1=(v_{01}^1, v_{01}^2), \quad e_2=(v_{02}^1, v_{02}^2)$$

となっていたものを、

$$e_1=(v_{01}^1, v_{02}^2), \quad e_2=(v_{02}^1, v_{01}^2)$$

と枝を付け変える。このようにすれば$|C^k|=k+1$となる。このとき、枝の付け変えによっても全てのカットセットの長さはk以上に保たれる。このことをいうためには、v_{01}^1と、$v_{02}^1, v_{02}^2, v_{01}^2$の3点との間の枝非共有道の数が全て$k$以上であることを示せばよい。

G^kにおいてv_{01}^1 [v_{01}^2] とv_{02}^1 [v_{02}^2] とを結ぶ枝非共有道のうち、Z_1^2またはZ_2^2 [Z_1^1またはZ_2^1] の点を経由しない道の集合をP_1 [P_2] とする。またv_{01}^1 [v_{02}^1] とv_{01}^2 [v_{02}^2] とを結ぶ枝非共有道のうち、Z_2^1またはZ_2^2 [Z_1^1またはZ_1^2] の点を経由しない道の集合をP_3 [P_4] とする。Z_j^i ($i, j=1, 2$) の定義より

$$|P_m|=(k-1)/2 \quad (m=1, 2, 3, 4)$$

である。このとき、各P_mの要素である道を構成する枝は、全て非共通であることに注意する。v_{01}^1とv_{02}^1 [v_{01}^2] 間の枝非

共有道は、P_1［P_3］で$(k-1)/2$本，P_3，P_2，P_4［P_1，P_4，P_2］の順に枝をたどって$(k-3)/2$本取ることにすると，さらにP_3［P_1］のうち残りの１本とe_2で１本，e_1とP_4［P_2］の残りの１本で１本取ることができ、総計

$$(k-1)/2+(k-3)/2+1+1=k$$

となり，v_{01}^1とv_{02}^1［v_{01}^2］とを結ぶ枝非共有道はk本以上存在する。v_{01}^1とv_{02}^2間の枝非共有道はP_1，P_4の順で$(k-1)/2$本、P_3，P_2の順で$(k-1)/2$本、e_1で１本取ることができ、総計k本以上存在する。よってG^kはk－枝連結である。

場合２：$\delta^k(G)$が奇数のとき

一般性を失わずに、$\delta^k(G_1)$が偶数，$\delta^k(G_2)$が奇数と仮定する。

G_1に$\lceil \delta^k(G_1)/2 \rceil$本の枝を付加してできた$k$－枝連結グラフを$G_1^k=(V_1, F_1)$とする。場合１．１と同様に$A_1$，$X_1$を定める。

G_2に$\lceil \delta^k(G_2)/2 \rceil$本の枝を付加してできた$k$－枝連結グラフのうちで，$d_{G_2}(v^*)=k-1$なる任意の点$v^* \in V_2-\{u\}$の次数が$k+1$となるものを$G_2^*=(V_2, F_2)$とする。場合1.1と同様に$G^k$を定義すると、$G^k$は$v^*$の次数が$k+1$である$k$－枝連結グラフであり，

$$|F - E| = \lceil \delta^k(G) / 2 \rceil$$

であることは容易に確かめられる。

G_2に$\lceil \delta^k(G_2) / 2 \rceil$本の枝を付加してできる$k$－枝連結グラフのうちで、$u$の次数が$k+1$であるものを$G_2^{k'} = (V_2, F_2')$とする。$G_2^{k'}$で$u$に接続している枝の集合を

$$A_2' = C \cup \{e_2, e^*\}$$

とし、A_2'のuではない端点集合をX_2'とする。e_2, e^*は付加された枝で、$e_2 = (u, v_0^2)$, $e^* = (u, u^{2*})$ $(v_0^2, u^{2*} \in X_2')$とする。v^*を$V_1 - \{v\}$の$d_G(v^*) = k-1$なる任意の点とする。

$$F' = (F_1 - A_1) \cup (F_2' - A_2') \cup C \cup \{(v_0^1, v_0^2), (v^*, u^{2*})\}$$

$$G^k = (V, F')$$

と定義する。(1)とG^kの定義から

$$|F' - E| = \lceil \delta^k(G) / 2 \rceil$$

である。また容易に確かめられるようにG'はk－枝連結である。

$$(V_1 - \{v\}) \cup (V_2 - \{u\}) = V$$

であるから、$d_G(v^*) = k-1$なる任意のv^*の次数が、G^kにおいで$k+1$とすることができた。

以上で、G^kがk－枝連結であることが示された。(証明終)

5、あとがき

定理3の証明は構成的であり、アルゴリズムを含んでいる。このアルゴリズムの計算時間の複雑度を決めているのは、R_kによる同値類を求める部分と、分割したグラフを再構成する部分である。同値類を求めたり、再構成するためには、最大フローを高々点数回流せばよい。従ってこのアルゴリズムの時間複雑度は、$O(|V|^4)$である。

一般にGが(k−1)−枝連結グラフでない場合には、定理2において等号は成立しないが、Gが、α−枝連結α−正規グラフ，木，および一様2−枝連結グラフの場合には定理2において等号が成立することが示せる。なお，木の場合定理2の等号が成立することは[3]で示されている。本方法は[3]のそれの精密化になっている。

参考文献

[1] K.P. Eswaran, R.E. Tarjan : "Augmentation Problems", SIAM J. Comput. Vol. 5, No. 4, (1976).

[2] Mader, W. : "Connectivity and Edge-Connectivity in Finite Graphs", in "Surveys in Combinatorics", Ed. by B. Bollobás, London Mathematical Society Lecture Note Series 38, Cambridge

University Press, (1979).

[3] 上野，梶谷，和田：“木から拡大構成される最小k-枝連結グラフ”，信学技報，IN 83-6 (1983-05).